

文章编号:1004-7220(2015)02-0104-07

利用非均匀格子 Boltzmann 方法研究支架 对颅内动脉瘤血流动力学的影响

孙烁然, 黄昌盛, 汪 垒, 施保昌

(华中科技大学 数学与统计学院, 武汉 430074)

摘要: **目的** 研究截面为不同旋转角度的三角形支架对颅内动脉瘤血流动力学的影响。**方法** 采用非均匀格子 Boltzmann 方法对支架区域进行局部加细,并结合曲边界处理格式对置入支架的颅内动脉瘤进行数值模拟。通过对动脉瘤内流动形态、瘤口速度、瘤内速度减小量等动力学参量的分析,探讨不同旋转角度支架用于治疗颅内动脉瘤的效果。**结果** 在减小瘤内血流速度方面,旋转角为 180° 的三角形截面支架效果最好,无旋转的三角形截面支架引起的速度减少量最小。在孔隙率较低情况下,截面为不同旋转角度的三角形支架起到效果差异较小。**结论** 非均匀格子 Boltzmann 方法结合曲边界处理格式可以较准确地研究动脉瘤血流动力学特性,为支架的设计提供参考依据,并为临床介入治疗法提供一定的指导。

关键词: 格子 Boltzmann 方法; 非均匀网格; 颅内动脉瘤; 支架; 血流动力学

中图分类号: R 318.01 文献标志码: A

DOI: 10.3871/j.1004-7220.2015.02.104

Stent effects on hemodynamics of cerebral aneurysm by non-uniform lattice Boltzmann method

SUN Shuo-ran, HUANG Chang-sheng, WANG Lei, SHI Bao-chang (*School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

Abstract: **Objective** To investigate the effects of triangle stents with different rotation angles on hemodynamics of cerebral aneurysms. **Methods** A non-uniform lattice Boltzmann method (LBM) was adopted to make local refinement on grids near the stent, and a scheme for the curved boundary conditions was used to numerically simulate the stented cerebral aneurysms. The stream plots of flows in the aneurysms, the velocity profiles at the aneurysm orifice and the velocity reduction were obtained and analyzed to evaluate the effects of stents with different rotation angles on treating cerebral aneurysms. **Results** With respect to velocity reduction, the best treatment effect was achieved in the triangle stent with rotation angle of 180° , while the triangle stent without any rotation caused the smallest velocity reduction. In addition, the dynamic differences were not obvious in triangle stents with different rotation angles at small porosities. **Conclusions** The non-uniform LBM combined with curved boundary conditions can be used to study hemodynamic characteristics of the cerebral aneurysm accurately, which provides reference for the design of such stent and also offers some guidance for intervention therapy in clinic.

Key words: Lattice Boltzmann method (LBM); Non-uniform mesh; Cerebral aneurysm; Stent; Hemodynamics

颅内动脉瘤一般由颅内动脉血管壁的局部先天性缺陷或腔内压力增高而引起的瘤状突出。颅内动

脉瘤破裂是引起蛛网膜下腔出血的首位病因,具有较高的发病率和死亡率。目前,临床上对动脉瘤的

收稿日期:2014-04-24; 修回日期:2014-06-14

基金项目:国家自然科学基金项目(11272132)。

通信作者:施保昌,教授, Tel:(027)87543231; E-mail: shibc@hust.edu.cn。

治疗通常可分为手术夹闭和血管内介入治疗。手术夹闭是疗效确切的经典治疗方式,但由于开颅手术存在手术创伤大、难度大及风险高等问题,介入疗法被越来越广泛地应用于临床治疗中^[1-2]。在介入疗法中,血管内单纯支架置入作为一种较新的治疗方式受到广泛关注。该疗法是将支架置入动脉瘤颈部,从而阻碍血流进入动脉瘤内,降低瘤内血流速度,诱导瘤内形成血栓,最终达到治疗目的^[3]。虽然有关颅内动脉瘤的形成机制目前尚不明晰,但是血流动力学参量被认为是影响颅内动脉瘤产生、发展乃至破裂的主要因素^[4-5]。

支架置入的治疗效果受到动脉瘤形状、支架结构等多方面因素的影响。针对这一问题,众多学者利用实验或数值模拟等方式展开研究,其中数值模拟被证明是有效且高效的研究方法,被广泛应用于相关研究中^[6-8]。

目前,国内外相关学者探讨了多种支架结构参数对于支架功效的影响,包括支架孔隙率^[7-8]、支架置入位置^[9]、支架类型^[10-11]等,本研究重点考察支架截面形态的影响。在这一方面, Kim 等^[8]研究截面分别为圆形、正方形及三角形的支架效果;曾堃等^[12]对截面分别为圆形、长方形、三角形的支架进行数值分析;张赟等^[13]探讨梯形截面支架的作用;乔爱科等^[11]研究表明,截面形状为三角形的支架能取得较好的治疗效果。然而,目前鲜有文献深入讨论支架不同旋转角度对支架治疗效果的影响。基于此,本文将探讨截面为不同旋转角度的三角形支架对颅内动脉瘤血流动力学影响。

作为一种新兴的计算方法,格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann method, LBM)在诸多领域获得成功的应用,包括多孔介质流、多相流、血液流以及化学反应等^[14-16]。相比传统的数值模拟方法, LBM 具有易于实现、易于处理复杂边界、天然并行性等优点,适用于大规模复杂流体的研究,包括颅内动脉瘤血流动力学问题。对于颅内动脉瘤血流动力学的数值模拟,由于支架的尺度相对极小,需要用较细的网络以获得较准确的结果,但较细的网络会导致巨大的计算量,从而求解耗时极长。针对这一问题,本文采用非均匀 LBM^[17]。非均匀 LBM 是指在流场变化剧烈的区域采用加细的网格,而在其他区域采用粗网格,这样在保证数值精度的同时也减少

了计算量,从而可以兼顾计算效率及精度。此外,在 LBM 中,通常使用阶梯状以直代曲的方式来描述复杂边界。为减少这种处理对精度的影响,本研究中支架的表面将使用二阶精度曲边界的边界处理格式。

1 格子 Boltzmann 方法

LBM 是一种“自底向上”的建模方法,它不再基于宏观连续介质模型的 Navier-Stokes 方程,而是直接从微观模型出发,用简化的微观或细观动力学模型模拟复杂流动的宏观行为。因此, LBM 兼有微观与宏观模型的优点,使其在模拟流体的相互作用和处理复杂边界等方面有着传统方法难以比拟的优势。本文采用不可压的 D2G9 模型^[18],并结合非均匀网格模型及曲边界处理格式。

1.1 非均匀网格模型

非均匀网格方法,可以用较小的计算量在细网格区域获取准确的动力学信息。首先根据流场状况进行网格划分,在不同的区域采用不同网格尺度求解,且尺度间需成正整数比例关系,粗、细网格的松弛时间满足:

$$\tau_f = 0.5 + n(\tau_c - 0.5) \quad (1)$$

式中: τ_c, τ_f 分别表示粗、细网格的松弛时间, n 为粗细网格的比例。在粗网格上演化 1 步的同时,在细网格上需要演化 n 步。

在非均匀网格模型中,需要注意粗、细网格之间的边界处理。如图 1 所示,对于细网格的边界, A, B, C, D, E, F, G 处于粗网格的内点,故对于宏观量 (u, v, p) 可根据粗网格前后时间步宏观量的插值得到,例如在 B 点:

$$\Psi_f(B, k, t + \Delta t) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \Psi_c(B, t) + \frac{k}{n} \Psi_c(B, t + \Delta t) \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

式中: Ψ_c, Ψ_f 分别表示粗、细网格的宏观量, k 表示 $t \sim t + \Delta t$ 时刻内在细网格上的演化次数。进一步,细网格点 H, I, G, K, L, M, N 上的宏观量可由 A, B, C, D, E, F, G 点的宏观量插值得到,例如在 I 点:

$$\Psi_f(I, k, t + \Delta t) = (1 - \omega) \Psi_f(B, k, t + \Delta t) + \omega \Psi_f(C, k, t + \Delta t) \quad (3)$$

式中: $\omega = |BI|/|CI|$ 。对于粗网格边界点 O, P, Q, R, S, T, U 处在细网格的内点,故其宏观量由细网格

上的点确定,例如在 P 点:

$$y_c(P, t + \Delta t) = y_f(P, n, t + \Delta t) \quad (4)$$

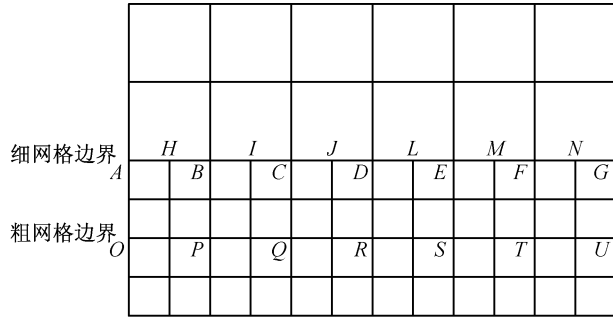


图1 非均匀网格边界示意图

Fig. 1 Non-uniform mesh boundary diagram

1.2 曲边界处理格式

在 LBM 中,通常使用以直代曲的方式来描述流场中的复杂边界。这种方式在处理固体边界时会带来较大的便利,在障碍物较大时也可获得较高的精度。对于本文的数值研究,由于支架所占网格较少,故这种处理方式难以准确描述支架形状,会产生很大的误差,需要使用曲边界处理格式(见图2)。

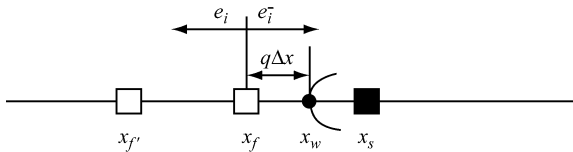


图2 曲边界节点示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the curved boundary node

基于此,采用非平衡态外推格式^[19]。首先需要确定分布函数 $f_i(x_s, t)$, 为此将其分解为平衡态和非平衡态两部分,即:

$$f_i(x_s, t) = f_i^{eq}(x_s, t) + f_i^{neq}(x_s, t) \quad (5)$$

对于平衡态部分可以使用下面的虚拟平衡态分布函数近似:

$$f_i^{eq}(x_s, t) \approx f_i^*(x_s, t) =$$

$$\rho(x_f, t) \left[1 + \frac{c_i \cdot u_s}{c_s^2} + \frac{(c_i \cdot u_s)^2}{2c_s^4} - \frac{u_s^2}{2c_s^2} \right] \quad (6)$$

式中: u_s 根据 $u(x_w, t)$ 、 $u(x_f, t)$ 和 $u(x_r, t)$ 确定,

$$u_s = \begin{cases} u_{s1}, q \geq 0.75 \\ qu_{s1} + (1 - q)u_{s2}, q < 0.75 \end{cases}$$

其中,

$$u_{s1} = [u_w + (q - 1)u(x_f, t)]/q$$

$$u_{s2} = [2u_w + (q - 1)u(x_r, t)]/(1 + q)$$

$$q = |x_f - x_w|/|x_f - x_s|, \quad 0 < q \leq 1$$

非平衡态的部分为:

$$f_i^{neq}(x_s, t) = \begin{cases} f_i^{neq}(x_f, t), q \geq 0.75 \\ qf_i^{neq}(x_f, t) + (1 - q)f_i^{neq}(x_r, t), q < 0.75 \end{cases} \quad (7)$$

这样基于分布函数 $f_i(x_s, t)$ 的上述逼近,可以执行标准的碰撞式为:

$$f_i'(x_s, t) = f_i(x_s, t) - \frac{1}{\tau} f_i^{neq}(x_s, t) = f_i^*(x_s, t) + \frac{\tau - 1}{\tau} f_i^{neq}(x_s, t) \quad (8)$$

与平直边界的非平衡外推格式一样,曲边界的非平衡外推方法的整体精度也为二阶。此外,它具有良好的数值稳定性,计算简单,易于实现且适用范围广泛。

2 动脉瘤模型

采用理想的二维动脉瘤模型,该模型类似于临床常见的动脉瘤模型,因而被相关工作广泛采用^[6-8]。动脉瘤直径 5 ~ 10 mm, 瘤口直径 5 ~ 10 mm。载瘤血管被看作一个直径 4 mm 的长直管, 血管长度 25 ~ 30 mm。该模型所使用网格规模为 800 × 288, 其中载瘤血管直径所占格子单位为 80 个网格。本研究选取两种模型,分别为大动脉瘤(SA)、小动脉瘤(SSA)进行模拟,具体动脉瘤模型参数见表1和图3^[7]。

表1 动脉瘤模型参数(格子单位)

Tab. 1 Parameters of the aneurysm model

模型	d_0	d_a	d_0/d_a	h	r_n
SA	200	100	2	108	10
SSA	100	100	1	58	15.5

注: d_0 、 d_a 分别为动脉瘤、瘤颈的直径

支架的截面直径为 0.1 mm。采用三角形截面的支架,高度为 2 格子单位。考虑到三角形支架的正旋转与逆旋转,图4所示为4种三角形支架及圆形支架模型,具体由无旋转的正三角形逆时针旋转 90°、180°、270°得到。另外,将针对不同孔隙率的支架展开研究,采用3种不同孔隙率,具体数值见表2。

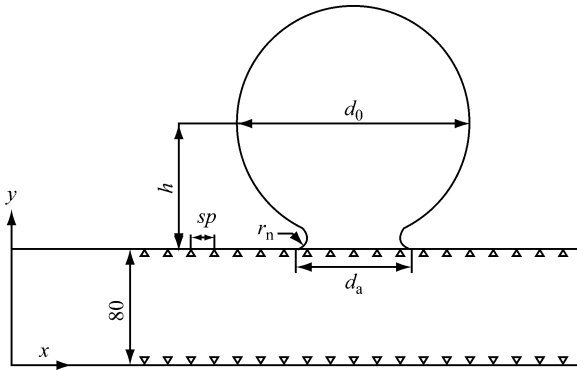


图3 置入支架的动脉瘤几何模型

Fig. 3 Geometry model of the stented aneurysm

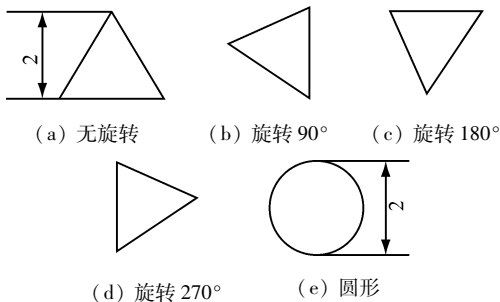


图4 支架模型示意图(格子单位)

Fig. 4 Schematic of the stent model (a) The triangle stent without rotation, (b) The triangle stent with rotation angle of 90° , (c) The triangle stent with rotation angle of 180° , (d) The triangle stent with rotation angle of 270° , (e) The circular stent

表2 不同支架的孔隙率

Tab. 2 Porosity rate of different stent models

孔隙率	sp	$\xi/\%$	$\xi_c/\%$
高	35	96.70	95.51
中	20	94.23	92.15
低	10	88.45	84.29

注: sp 为支架间隙, ξ 、 ξ_c 分别为三角形、圆形支架孔隙率

对支架所在区域网格进行局部加细,在纵坐标 60 ~ 140 之间使用细网格,粗、细网格尺度的比例为 1 : 4 (见图 5)。

模拟所使用的参数如下:雷诺数 $Re = Lu/\nu = 300$ (u 为血流在长管中心线的速度, L 为长管的宽度), 松弛时间 $\tau = 0.578$, 黏性系数 $\nu = 0.026$, 平均密度 $\rho = 1.0$ 。对于流场进出口边界及细网格内固体边界,使用非平衡态外推格式^[19],其余边界采用半反弹边界处理格式^[20]。

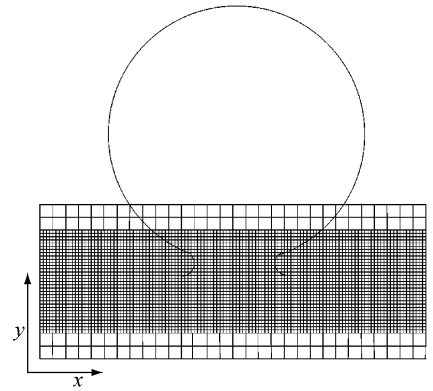


图5 局部加细模型

Fig. 5 Model with local refinement

3 结果

首先,验证非均匀 LBM 的有效性。针对 SSA 模型,将本文所得的瘤口处速度 v 与 Kim 等^[8] 的结果进行对比(见图 6)。

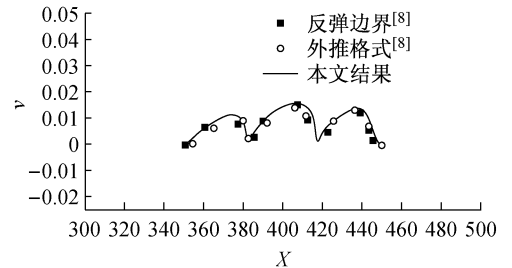


图6 SSA 模型瘤口处速度分布与文献[8]结果的比较

Fig. 6 Comparison of velocity profiles at aneurysm orifice of the SSA model with results reported in the literature [8]

其次,对比非均匀 LBM 与均匀 LBM 计算结果的差异。图 7 所示为在 SA 模型中不同的网格划分情况下瘤口处速度分布,其中局部加细为非均匀

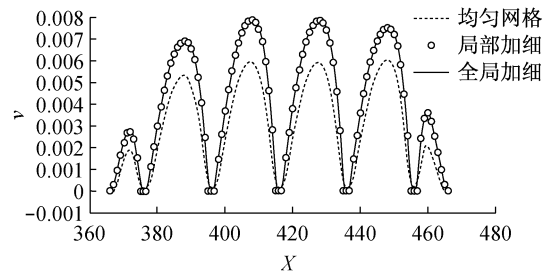


图7 SA 模型不同网格加细方式下瘤口处速度分布

Fig. 7 Velocity profiles at aneurysm orifice of the SA model with different mesh refinement

LBM,全局加细为网格加细4倍的均匀LBM,可以近似视为标准解。由图7可见,使用非均匀网格的结果与全局均匀细网格的计算结果吻合较好,均匀粗网格的计算结果则差别较大。此外,按照本文的加细方式,非均匀网格的模型计算量仅为全局加细网格模型计算量的1/2。

应用非均匀网格可以得到瘤口处准确的流线图

情况。图8所示为SA模型中4种三角形支架模型在不同孔隙率下的流线图。从图8中可以清晰识别支架的设置方式及流体流经支架的状态,而在使用均匀粗网格时,这些信息是无法获取的。在粗网格模型中,也无法达到如图8所示的精确状态。需要指出的是,目前LBM领域相关工作均使用较粗的网格^[7-8]。

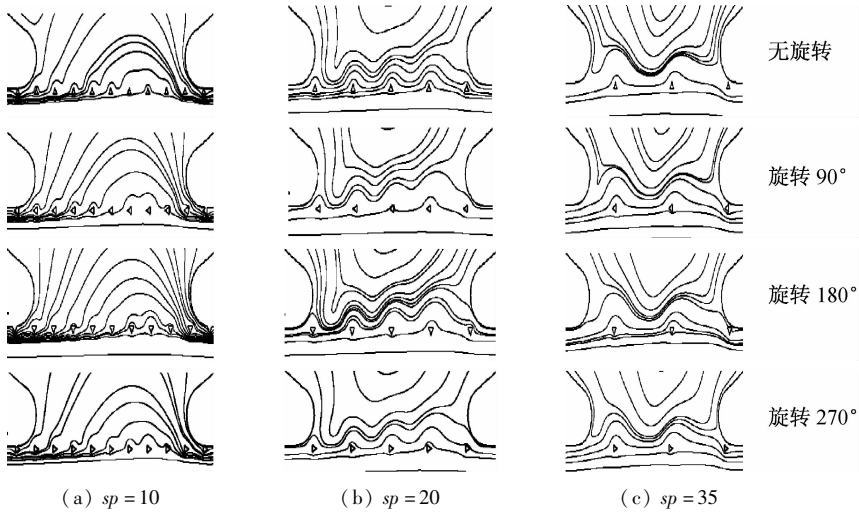


图8 不同三角形支架在SA模型中细网格瘤口处流线图
Fig. 8 Streamline charts of the flow in different triangle stents at aneurism orifice of the SA model with fine mesh

支架置入后会对瘤内的流线产生较大的影响。图9展示了动脉瘤内的流线图,由于3种三角形支架所产生的流线图较为相近,故图9只给出三角形

支架旋转角为180°时动脉瘤内的流线图,结果表明图中所反映出的流动形态和趋势与文献[7-8]中的结果吻合较好。

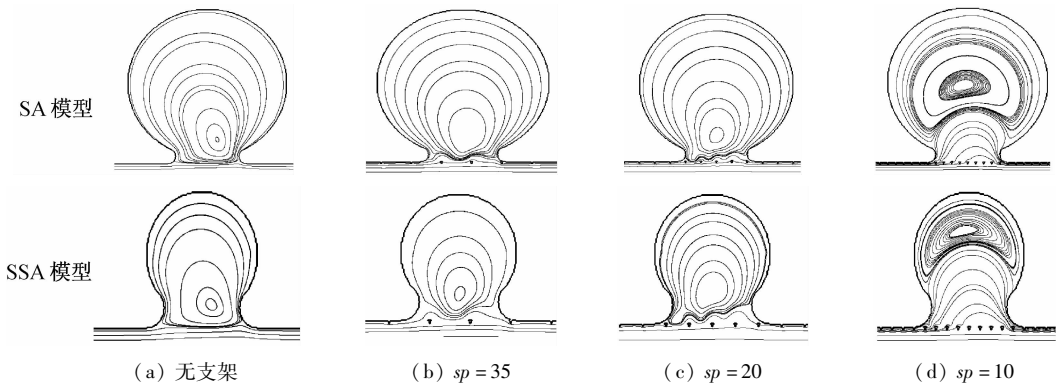


图9 不同孔隙率支架的流线图
Fig. 9 Streamline charts of the flow in non-stented model and stented models with different porosities

血流速度被认为是影响动脉瘤破裂的主要因素之一,速度越大则动脉瘤破裂的危险越大,故瘤口处的速度是重要的研究指标。图10所示为不同旋转

角度支架在SA模型中瘤口处的速度分布。为定量评估支架置入对于动脉瘤内速度的影响,通常采用瘤内的速度减小量 v_r 作为衡量指标:

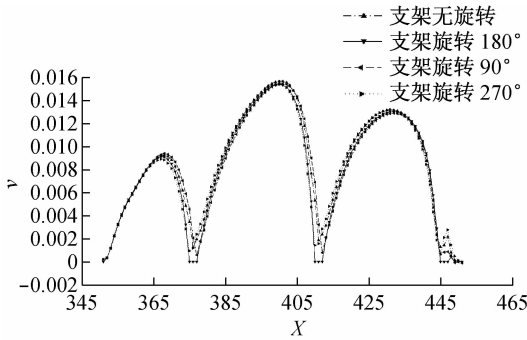


图 10 SA 模型中瘤口处速度分布 ($sp=35$)

Fig. 10 Velocity profiles at aneurism orifice of the SA model with $sp = 35$

$$v_r = \frac{(v - v_s)}{v} \times 100\%$$

$$v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} \quad (9)$$

式中: v 为动脉瘤内的平均速度, v_s 为置入支架后瘤内的平均速度。表 3 所示为不同支架孔隙率下支架模型在不同动脉瘤中所得到的速度减小量。

表 3 瘤口处动脉瘤内的速度减小量

Tab. 3 The velocity reduction at aneurism orifice inside the aneurysm

支架模型		$v_r/\%$				圆形 支架
		无旋转	旋转 90°	旋转 180°	旋转 270°	
SA 模型	$sp = 10$	93.39	93.58	93.89	93.79	93.59
	$sp = 20$	76.75	78.11	80.22	78.60	78.23
	$sp = 35$	58.32	59.01	60.69	59.70	59.30
SSA 模型	$sp = 10$	89.24	89.28	89.44	89.52	89.31
	$sp = 20$	73.45	74.83	76.92	75.36	74.97
	$sp = 35$	47.15	47.67	49.18	48.50	48.04

对于两种动脉瘤模型, 三角形旋转角为 180° 与无旋转模型对应的速度减小量最大差值见表 4。当支架孔隙率较低时, 速度减小量在不同支架模型之间几乎无变化; 而孔隙率较高时, 速度减小量在不同

表 4 不同支架在相同孔隙率模型中 v_r 最大差值

Tab. 4 The maximum difference values of velocity reduction in different stents with the same porosity

模型	v_r 最大差值/ $\%$		
	$sp = 10$	$sp = 20$	$sp = 35$
SA	0.50	3.47	2.36
SSA	0.27	3.46	2.03

模型中则出现波动, 即其数值结果在孔隙率较高时速度减小量变化相对较大。

4 讨论

本文验证了非均匀 LBM 的有效性, 并分析了非均匀 LBM 的可行性及优势。非均匀 LBM 与全局加细的均匀 LBM 所得结果吻合很好, 非均匀 LBM 可以准确捕捉瘤口处的速度值(见图 7)。从计算量的角度来讲, 在计算结果几乎一致的情况下, 非均匀 LBM 计算量为全局加细均匀 LBM 计算量的 $1/2$ 。从图 8 中可以直观看到在瘤口处三角形支架的放置情况及血流的流动形态。动脉瘤内流线的形态在置入支架后变得复杂, 且置入支架后改变流动的形态, 同时置入支架的动脉瘤内形成的涡的强度要比没有放置支架的弱(见图 9)。

不同三角形支架模型对颅内动脉瘤血流动力学参数的影响产生比较明显的差异。从图 10 可以直观得知 4 种支架模型下瘤口速度分布情况, 对于这 4 种模型, 瘤口处的速度分布差异不明显, 具有相同的变化趋势。在瘤内的速度减小量方面, 发现三角形旋转角 180° 模型的效果最好, 270° 模型次之, 90° 模型较差, 无旋转模型最差(见表 3)。作为比较, 表 3 同时给出了应用圆形截面支架工况的速度减小量。从结果可以看出, 在相同的孔隙率条件下, 三角形旋转角 180° 和 270° 模型的作用效果稍好于圆形支架的作用效果, 而其他两种三角形支架模型所起到的效果则比圆形支架要差。以上结果表明, 考虑支架旋转角度是有意义的, 角度旋转可使三角形支架作用效果优于圆形支架。此外, 三角形支架所用的材料少于圆形支架, 有利于节省支架材料。

在支架孔隙率较低模型中, 速度减小量几乎没有波动, 说明不同支架模型对于动脉瘤内速度影响的差异很小; 在支架孔隙率较高模型中, 速度减小量有波动, 表明不同支架模型所造成的速度减小量差异相对较大(见表 4)。因此, 在放置较高孔隙率支架时需要更细致地考虑支架的形态, 此时支架的形态、结构对于动脉瘤的影响相对较大。

5 结论

本文研究了不同旋转角度三角形支架对颅内动脉瘤血流动力学的影响。结果表明, 三角形旋转角

180°模型的效果最好,旋转角 270°模型次之,旋转角 90°较差,无旋转模型最差,且前两种支架模型的效果优于圆形截面支架。基于此,应用三角形截面支架治疗颅内动脉瘤时采用旋转角为 180°效果更好。此外,孔隙率的差异会影响支架的作用效果,在较高孔隙率条件下考虑支架的形态差异会更具意义。本研究所应用的非均匀 LBM 和曲边界处理格式,可以较细致、准确地捕捉动脉瘤附近血流动力学特征,为后续研究支架的形态、形状等因素对颅内动脉瘤血流动力学的影响提供了有效的方法。尤其是对于三维问题,非均匀 LBM 将更具优势。本课题组今后会致力于将本文的方法推进至三维情形,以便更真实地研究颅内动脉瘤血流动力学相关问题。

致谢:感谢华中科技大学数学与统计学院柴振华博士以及实验室同学武琛、杨旭光、梁宏、李钱煊在本文完成过程中提出宝贵意见和建议。

参考文献:

- [1] 陆海, 郑晶. 开颅手术与血管内介入治疗颅内动脉瘤疗效对比[J]. 中国继续医学教育, 2013, 5(3): 7-9.
- [2] 曲桂艳, 陈玲, 吕建萍. 介入治疗在脑血管病治疗中的作用[J]. 中国误诊学杂志, 2009, 9(36): 8871-8872.
- [3] 陈光贵, 罗来兵, 郑立升, 等. 颅内动脉瘤介入治疗 20 例疗效分析[J]. 蚌埠医学院学报, 2011, 36(4): 376-378.
- [4] Jeong W, Rhee K. Hemodynamics of cerebral aneurysms: Computational analyses of aneurysm progress and treatment [J]. *Comput Math Methods Med*, 2012, doi: 10.1155/2012/782801.
- [5] Sunil A, Fernando M, Rainald L, *et al.* Simulation of intracranial aneurysm stenting: Techniques and challenges [J]. *Comput Methods Appl*, 2009, 198(45-46): 3567-3582.
- [6] Huang C, Chai Z, Shi B. Non-Newtonian effect on hemodynamic characteristics of blood flow in stented cerebral aneurysm [J]. *Commun Comput Phys*, 2013, 13(3): 916-928.
- [7] Miki H, Makoto O, Retal DA. A lattice Boltzmann study of blood flow in stented aneurysm [J]. *Future Gener Comp Sy*, 2004, 20(6): 925-934.
- [8] Kim YH, Xu XF, Lee JS. The effect of stent porosity and strut shape on saccular aneurysm and its numerical analysis with lattice Boltzmann method [J]. *Ann Biomed Eng*, 2010, 38(7): 2274-2292.
- [9] Anzai H, Ohta M, Falcone JL, *et al.* Optimization of flow diverters for cerebral aneurysms [J]. *J Comput Sci*, 2012, 3(1): 1-7.
- [10] Liou TM, Liou SN, Chu KL. Intra-aneurysmal flow with helix and mesh stent placement across side-wall aneurysm pore of a straight parent vessel [J]. *J Biomech Eng*, 2004, 126(1): 36-43.
- [11] 乔爱科, 顾兆勇, 孟宪龙, 等. 不同结构支架植入蜿蜒型颅内动脉瘤的仿真研究 [J]. 北京工业大学学报, 2011, 37(5): 780-787.
- [12] 曾堃, 乔爱科. 三种截面支架对动脉瘤血流动力学影响的比较研究[J]. 医用生物力学, 2012, 27(4): 220-226.
Zeng K, Qiao AK. Comparative study on effects from three kinds of stents with different cross-section on aneurysmal hemodynamics [J]. *J Med Biomech*, 2012, 27(4): 220-226.
- [13] 张赞, 乔爱科. 优化设计颅内动脉瘤用梯形截面支架底边长度[J]. 医用生物力学, 2012, 27(3): 294-298.
Zhang Y, Qiao AK. Optimization of baseline on stent with trapezoidal cross-section for intracranial aneurysm [J]. *J Med Biomech*, 2012, 27(3): 294-298.
- [14] Chen SY, Gary DD. Lattice Boltzmann method for fluid flows [J]. *Annu Rev Fluid Mech*, 1998, 30: 329-364.
- [15] Langaas K, Grubert D. Lattice Boltzmann simulations of wetting and its application to disproportionate permeability reducing gel [J]. *J Petroleum Sci Eng*, 1999, 24(2): 199-211.
- [16] Yamamoto K, He X, Doolen GD. Simulation of combustion field with lattice Boltzmann method [J]. *J Stat Phys*, 2002, 107(1-2): 367-383.
- [17] 王广超, 施保昌, 邓滨. 嵌套边界的非均匀格子 Boltzmann 方法[J]. 水动力学研究与进展, 2004, 19(1): 19-25.
- [18] Guo ZL, Shi BC, Wang NC. Lattice BGK model for incompressible Navier-Stokes equation [J]. *J Comput Phys*, 2000, 165(1): 288-306.
- [19] Guo ZL, Zheng CG, Shi BC. An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method [J]. *Phys Fluids*, 2002, 14(6): 2007-2010.
- [20] He X, Zou Q, Luo LS, *et al.* Analytic solutions of simple flow and analysis of non-slip boundary condition for lattice Boltzmann BGK model [J]. *J Stat Phys*, 1997, 87(1-2): 115-123.